Nexo Revista Científica
Vol. 28, No. 01, pp.15-24/Junio 2015
ISSN-E 1995-9516
Universidad Nacional de Ingeniería
http://revistas.uni.edu.ni/index.php/Nexo
DOI: http://dx.doi.org/10.5377/nexo.v28i01.2189

EL RESIDUO DE LA FUNCIÓN GENERALIZADA $(M \pm i0)^{\lambda}$.

THE RESIDUE FROM THE GENERALIZED FUNCTION $(M \pm i0)^{\lambda}$.

Manuel A. Aguirre[1] y Emilio Aguirre Rébora

Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada (NuCOMPA)
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro Tandil, Argentina.
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(recibido/received: 04-Marzo-2015; aceptado/accepted: 18-Mayo-2015)

RESUMEN

Sea $M = M(x_1,...,x_n)$ una forma cuadrática definida en (18), en este artículo se define la distribución $(M \pm i0)^{\lambda}$ y se encuentra el residuo en $\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}, m = 1,2,...$ y $k = 0,1,2,...$ como consecuencia se obtiene la propiedad $F^{\pm}_{-2km} = L^k_a\{\delta(x)\}$ (ver fórmula (42)), donde $F^{\pm}_{\alpha}$ es la familia de funciones distribucionales definida por (35) y es el operador definido por (39) y L^k_a es la distribución delta de Dirac.

Finalmente usando la transformada de Fourier de $F^{\pm}_{\alpha}$ se le da un sentido al producto de convolución (ver fórmula (59). Los resultados obtenidos en este artículo son generalizaciones de fórmulas que aparecen en ([1], página 353, ([2])) y ([3]) página 346, fórmula 5.4.

Clasificación según AMS: 46F10
Palabras Claves: Distribución; Residuo; Transformada de Fouirier.

ABSTRACT

Let $M = M(x_1,...,x_n)$ be a quadratic form defined by (18), in this paper we defined the distributions $(M \pm i0)^{\lambda}$ and find the residue at $\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}, m = 1,2,...$ and $k = 0,1,2,...$ As consequences we obtain the propertie $F^{\pm}_{-2km} = L^k_a\{\delta(x)\}$ (c.f. formula (42)), where $F^{\pm}_{\alpha}$ is the distributional family defined by (35) and L^k_a is the operator defined by (39) and $\delta(x)$ is the distribution of Dirac delta.

Finally using the Fourier transform of the distributional $F^{\pm}_{\alpha}$ are give a sense to the convolution product $L^k_a\{\delta(x)\} * L^l_a\{\delta(x)\}$. (c.f. formula (59). Our results are generalization of formulae that appear in ([1], page 353, ([2])) and ([3]) page 346, formula 5.4.

AMS Subject Classification: 46F10
Keywords: Distributions; Residue; Fourier Transform.

.

[1] This work was partially supported by Comisión de Investigaciones Científicas de la Pcia. de Buenos Aires (C.I.C.) Argentina.

EL RESIDUO DE $\left((\gamma_1 x_1^2 + \ldots + \gamma_n x_n^2)^m\right)^\lambda$

Sea

$$P = P(x_1,\ldots,x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j^2\right)^m \tag{1}$$

una forma cuadrática con coeficientes complejos, y sea la parte imaginaria de P, $\operatorname{Im} P$ una forma cuadrática definida positiva, es decir, $\operatorname{Im}\ \gamma_j > 0,\ j = 1,2,\ldots,n$,

$$\gamma_j = i b_j \tag{2}$$

con $b_j > 0.$

Entonces para toda función de prueba 1 φ en el espacio K donde K es el conjunto de funciones C^∞ con soporte compacto ([1], página 2), se tiene,

$$(P^\lambda, \varphi) = \int \left[\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j^2\right]^{m\lambda} \varphi(x)dx = e^{\frac{\lambda\pi i m}{2}} \int \left(\sum_{j=1}^{n} b_j x_j^2\right)^{m\lambda} \varphi(x)dx \tag{3}$$

Haciendo

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{y_1}{\sqrt{b_1}} \\ &\ \ . \\ &\ \ . \\ &\ \ . \\ x_n &= \tfrac{y_n}{\sqrt{b_n}} \end{aligned} \tag{4}$$

En (3), se tiene,

$$(P^\lambda, \varphi) = \frac{e^{\frac{\lambda\pi i m}{2}}}{\sqrt{b_1}\ldots\sqrt{b_n}} \int \rho^{2m\lambda} \varphi_1(y)dy \tag{5}$$

donde

$$\rho^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2 \tag{6}$$

y

$$\varphi_1(y_1,\ldots,y_n) = \varphi(x_1,\ldots,x_n). \tag{7}$$

Ahora, sabemos que la funcional $(r^{2\lambda}, \varphi)$ ([1], capítulo I, sección 3.9), tiene singularidades en los puntos $2\lambda = -n - 2k,$ por tanto la funcional $(\rho^{2\lambda m}, \varphi)$, tiene polos simples en los puntos $\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}.$

Para $k = 0$ encontramos la siguiente fórmula, ([1], página 73 y [6], página 792)

$$\operatorname*{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2m}} r^{2\lambda m} = \frac{1}{2m} \operatorname*{Res}_{\beta = -n} r^\beta = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2m\Gamma(\frac{n}{2})}\delta(x) \tag{8}$$

Por tanto de (5) usando (8), se tiene

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}} P^{\lambda} = \frac{e^{\frac{-\pi i n}{4}}}{\sqrt{b_1}\ldots\sqrt{b_n}} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(2m)\Gamma(\frac{n}{2})}\delta(x). \tag{9}$$

Vamos a encontrar el residuo de P^{λ} en los otros puntos.
Para este propósito consideremos el operador diferencial

$$L_{\gamma} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\gamma_j} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \tag{10}$$

donde

$$\gamma_j = ib_j,\ b_j > 0, j = 1,2,..., n. \tag{11}$$

Por cálculo directo se obtiene la siguiente relación

$$L_{\gamma} P^{\lambda+\frac{1}{m}} = 2^2 (m\lambda+1)(m\lambda+\frac{n}{2})P^{\lambda}. \tag{12}$$

Iterando l veces se obtiene la siguiente relación

$$L_{\gamma}^{l}\{P^{\lambda+\frac{l}{m}}\} = 2^{2l}(m\lambda+1)...(m\lambda+l)(m\lambda+\frac{n}{2})...(m\lambda+\frac{n}{2}+l-1)P^{\lambda}. \tag{13}$$

Haciendo $l = km, m = 1,2,...$ en (13) se obtiene

$$L_{\gamma}^{km}\{P^{\lambda+k}\} = 2^{2km}(m\lambda+1)...(m\lambda+km)(m\lambda+\frac{n}{2})...(m\lambda+\frac{n}{2}+km-1)P^{\lambda}. \tag{14}$$

De (14), se tiene

$$P^{\lambda} = \frac{1}{2^{2km}(m\lambda+1)...(m\lambda+km)(m\lambda+\frac{n}{2})...(m\lambda+\frac{n}{2}+km-1)} L_{\gamma}^{km}\{P^{\lambda+k}\} \tag{15}$$

y consecuentemente

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-k} P^{\lambda} = \left.\frac{1}{2^{2km}(m\lambda+1)\ldots(m\lambda+km)(m\lambda+\frac{n}{2})\ldots(m\lambda+\frac{n}{2}+km-1)}\right|_{\lambda=-\frac{n}{2m}-k}.$$

$$.\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-k} L_{\gamma}^{km}\{P^{\lambda+k}\} =$$

$$= \frac{1}{2^{2km}(m(-\frac{n}{2m}-k))\ldots(m(-\frac{n}{2m}-k)+km)(m(-\frac{n}{2m}-k)+\frac{n}{2})\ldots(m(-\frac{n}{2m}-k)+\frac{n}{2}+km-1)}. \tag{16}$$

$$.\operatorname*{Res}_{\beta=-\frac{n}{2m}} L_{\gamma}^{km} P^{\beta}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^{2km}(-1)^{mk}\Gamma(\frac{n}{2}+mk)}\frac{1}{(-1)^{mk}(mk)!}\operatorname*{Res}_{\beta=-\frac{n}{2m}} L_{\gamma}^{km} P^{\beta}$$

luego, insertando (9), se llega a la siguiente fórmula

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-k} P^{\lambda} = \frac{e^{\frac{-\pi i n}{4}} 2\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})L_{\gamma}^{km}\{\delta\}}{2^{2km}\Gamma(\frac{n}{2}+mk)(km)!\sqrt{b_1}\ldots\sqrt{b_n}\Gamma(\frac{n}{2})(2m)}$$

$$= \frac{e^{\frac{-\pi i n}{4}} 2\pi^{\frac{n}{2}}L_{\gamma}^{km}\{\delta\}}{(2m)2^{2km}\Gamma(\frac{n}{2}+mk)(km)!\sqrt{b_1}\ldots\sqrt{b_n}} = \frac{e^{\frac{-\pi i n}{4}} 2\pi^{\frac{n}{2}}L_{\gamma}^{km}\{\delta\}}{(2m)2^{2km}\Gamma(\frac{n}{2}+mk)(km)!\sqrt{-i\alpha_1}\ldots\sqrt{-i\alpha_n}}. \tag{17}$$

LAS FUNCIONES GENERALIZADAS $(M+i0)^{\lambda}$ Y $(M-i0)^{\lambda}$

Sea

$$M = M(x_1 \ldots x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^2\right)^m \tag{18}$$

una forma cuadrática no degenerada con coeficientes reales. Entonces podemos definir distribuciones análogas a $(x+i0)^{\lambda}$ y $(x-i0)^{\lambda}$ ([1], capítulo I, sección 3) las cuales podrían llamarse $(M+i0)^{\lambda}$ y $(M-i0)^{\lambda}$.

Para este propósito vamos a considerar la forma cuadrática

$$G = M + iM' \tag{19}$$

donde M' es una forma cuadrática definida positiva (con coeficientes reales).

Sabemos de ([1], página 275) que cuando los coeficientes de M' convergen a cero, la función generalizada $(M+iM')^{\lambda}$ converge y su valor de convergencia es decir su límite está bien definido. Este límite lo llamaremos $(M+i0)^{\lambda}$; es decir por definición se tiene que

$$(M+i0)^{\lambda} = \lim_{M'\to 0}(M+iM')^{\lambda}. \tag{20}$$

En forma similar, se define la función generalizada $(M-i0)^{\lambda}$ como el límite de la función generalizada $(M-iM^{'})^{\lambda}$ cuando los coeficientes de $M^{'}$ convergen a cero, donde $M^{'}$ es una forma cuadrática definida positiva, es decir, por definición se tiene,

$$(M-i0)^{\lambda}=\lim_{M^{'}\to 0}(M-iM^{'})^{\lambda}. \tag{21}$$

De las definiciones de $(M+i0)^{\lambda}$ y $(M-i0)^{\lambda}$ podemos deducir que ellas son analíticas en λ en todo punto excepto en $\lambda=-\frac{n}{2m}-\frac{k}{m}$, donde k es un entero no negativo.

De (17) las distribuciones $(M+i0)^{\lambda}$ y $(M-i0)^{\lambda}$ tienen polos simples con residuo dado por

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-\frac{k}{m}}(M+i0)^{\lambda}=\lim_{M'\to 0}\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-\frac{k}{m}}(M+iM')^{\lambda} \tag{22}$$

y

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-\frac{k}{m}}(M-i0)^{\lambda}=\lim_{M'\to 0}\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-\frac{k}{m}}(M-iM')^{\lambda}. \tag{23}$$

En orden de encontrar el residuo, necesitamos solamente encontrar el límite cuando M' converja a cero de $\sqrt{-i\gamma_1}\sqrt{-i\gamma_2}...\sqrt{-i\gamma_n}$.
Sin perder generalidad podemos asumir que M' es de la forma

$$M'=\varepsilon(|x|^2)^m=\varepsilon(x_1^2+...+x_n^2)^m \quad . \tag{24}$$

Usando que

$$\sqrt{z}=|z|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}\arg z},-\pi<\arg<\pi,$$

([1], página 273), donde z es un número complejo, se tiene

$$\begin{aligned}&\sqrt{-i\gamma_1}\sqrt{-i\gamma_2}...\sqrt{-i\gamma_n}=\sqrt{|\gamma_1...\gamma_n|}e^{-\frac{n\pi i}{4}}.\\&.e^{\frac{i}{2}\arg\gamma_1}...e^{\frac{i}{2}\arg\gamma_p}.e^{\frac{i}{2}\arg\gamma_{p+1}}...e^{\frac{i}{2}\arg\gamma_{p+q}}\quad .\end{aligned} \tag{25}$$

Supongamos que el autovalor p es positivo y el autovalor q es negativo, donde $p+q=n$ es la dimensión del espacionegative. Entonces cuando $\varepsilon\to 0$, de (25) se llega a la expresión

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{-i\gamma_1}\sqrt{-i\gamma_2}...\sqrt{-i\gamma_n}=e^{\frac{q\pi i}{2}}\sqrt{|a_1...a_p...a_{p+q}|}e^{-\frac{n\pi i}{4}}=e^{\frac{q\pi i}{2}}\sqrt{|\Delta|}e^{-\frac{n\pi i}{4}} \tag{26}$$

donde Δ es el determinante de los coeficientes de M .

Ahora usando la ecuación (17) para expresar el residuo de G^{λ} en $\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}$, lo cual nos da

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-\frac{k}{m}} (M+i0)^{\lambda} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(2m)2^{2k}\,\Gamma(\frac{n}{2}+k)\,k!\,e^{\frac{q\pi i}{2}}\sqrt{|\Delta|}} L_{\gamma}^{k}\{\delta\} \tag{27}$$

donde

$$L_{\gamma} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\gamma_j} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}. \tag{28}$$

En forma similar se obtiene

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-\frac{k}{m}} (M-i0)^{\lambda} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(2m)2^{2k}\,\Gamma(\frac{n}{2}+k)\,k!\,e^{-\frac{q\pi i}{2}}\sqrt{|\Delta|}} L_{\gamma}^{k}\{\delta\}. \tag{29}$$

Nosotros observamos que L_{γ} puede ser escrito en la siguiente forma

$$L_{\gamma} = L_a = \frac{1}{a_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{1}{a_p}\frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{1}{a_{p+1}}\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} + \ldots + \frac{1}{a_{p+q}}\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \tag{30}$$

si $a_1,\ldots,a_p > 0$ y $a_{p+1}\ldots.a_{p+q} < 0.$
En particular si

$$\begin{gathered} a_1 = \ldots = a_p = 1 \\ \text{y} \\ a_{p+1} = \ldots = a_{p+q} = -1 \end{gathered} \tag{31}$$

y $m=1$, de (27) y (29), se obtiene la fórmula

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} (x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 \pm i0)^{\lambda} = \\ &= \frac{2\pi^{-\frac{n}{2}}}{2^{2k}\,k!\,\Gamma(\frac{n}{2}+k)\,e^{\pm\frac{q\pi}{2}}} L^k \delta \end{aligned} \tag{32}$$

donde

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}. \tag{33}$$

la fórmula (32) aparece en ([1],página 353).
Haciendo $k = sm, m = 1,2,\ldots$ la fórmulas (27) y (29) pueden ser escritas en la siguiente forma:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-s}(M\pm i0)^{\lambda}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(2m)2^{2sm}\Gamma(\frac{n}{2}+sm)(sm)!e^{\pm\frac{q\pi i}{2}}\sqrt{|\Delta|}}L_{\gamma}^{sm}\{\delta\} \qquad (34)$$

LA DISTRIBUCIÓN $F^{\pm}_{-2km}(M\pm i0,m,n)$

Sea $F^{\pm}_{\alpha}=F^{\pm}_{\alpha,m,n}=F^{\pm}_{\alpha,m,n}(M\pm i0,m,n)$ la familia de funciones distribucionales definidas por

$$F^{\pm}_{\alpha}(M\pm i0,m,n)=A^{\pm}_{\alpha,n}(M\pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2m}} \qquad (35)$$

Donde

$$A^{\pm}_{\alpha,n}=\frac{e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})\sqrt{|\Delta|}}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})}e^{\pm\frac{q\pi i}{2}} \qquad (36)$$

$(M\pm i0)^{\lambda}$ son definidas por (20) y (21), Δ es el determinante de los coeficientes de $M(x_1...x_n)$ y $\Gamma(\frac{\alpha}{2})$ es la función gama. La familia $F^{\pm}_{\alpha}$ aparece en ([3]).

Tomando en cuenta que $(M\pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2m}}$ tiene polos simples en $\alpha=-2km,$ y considerando que la función $\Gamma(\frac{\alpha}{2})$ tiene polos simples en los mismos puntos, donde $k=0,1,2...$ y $m=1,2,...$ se tiene,

$$\begin{aligned}
F^{\pm}_{-2km,m,n}(M\pm i0,m,n)&=\lim_{\alpha\to-2km}F^{\pm}_{\alpha,m,n}=\\
&=\lim_{\alpha\to-2km}\frac{e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})\sqrt{|\Delta|}}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}}e^{\pm\frac{q\pi i}{2}}.\lim_{\alpha\to-2km}\frac{(M\pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2m}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\\
&=\frac{e^{km\pi i}\Gamma(\frac{n}{2}+km)}{2^{-2km}\pi^{\frac{n}{2}}}.\lim_{\alpha\to-2km}\frac{(\alpha+2km)(M\pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2m}}}{(\alpha+2km)\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\\
&=\frac{e^{km\pi i}\Gamma(\frac{n}{2}+km)}{2^{-2km}\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{\sqrt{|\Delta|}e^{\pm\frac{q\pi i}{2}}\operatorname*{Res}_{\alpha=-2km}(M\pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2m}}}{\lim_{\alpha\to-2km}(\alpha+2km)\Gamma(\frac{\alpha}{2})}.
\end{aligned} \qquad (37)$$

Usando la fórmula (34), se tiene,

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{\alpha=-2km}(M\pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2m}}&=(2m)\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}(M\pm i0)^{\lambda}=\\
&=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}L_a^{km}\{\delta\}}{2^{2km}\Gamma(\frac{n}{2}+km)(km)\sqrt{|\Delta|}e^{\pm\frac{q\pi i}{2}}}
\end{aligned} \qquad (38)$$

donde

$$L_a=\frac{1}{a_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+...+\frac{1}{a_p}\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}-\frac{1}{a_{p+1}}\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}-...-\frac{1}{a_{p+q}}\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \qquad (39)$$

si $a_1,...,a_p>0$ y $a_p,...,a_{p+q}<0.$

Ahora usando la fórmula

$$\operatorname*{Re}_{z=-k} s\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!} \tag{40}$$

se tiene,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to-2km} \Gamma(\tfrac{\alpha}{2})(\alpha+2km) &= 2\lim_{\alpha\to-2km} (\tfrac{\alpha}{2}+km)\Gamma(\tfrac{\alpha}{2}) \\ &= 2\lim_{Z\to-km} (z+km)\Gamma(z) = \tfrac{2(-1)^{km}}{(km)!}. \end{aligned} \tag{41}$$

De (37) y usando (38) y (41) se obtiene la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} F^{\pm}_{-2km} = F^{\pm}_{-2km,m,n} &= \frac{e^{\frac{km\pi i}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}+km)\sqrt{|\Delta|}}{2^{-2km}\pi^{\frac{n}{2}}} e^{\pm\frac{q\pi i}{2}}. \\ &\cdot \frac{(km)!}{2(-1)^{km}} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} L_a^{km}\delta}{2^{2km}\Gamma(\frac{n}{2}+km)(km)!\sqrt{|\Delta|}e^{\pm\frac{q\pi i}{2}}} \\ &= L_a^{km}\{\delta(x)\}. \end{aligned} \tag{42}$$

En particular si $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 1, a_{p+1} = \ldots = a_{p+q} = -1$ y $m = 1$, se tiene

$$F_{-2k} = F_{-2k,m,n}(M \pm i0, m, n) = L^k\delta \tag{43}$$

donde

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \tag{44}$$

EL PRODUCTO DE CONVOLUCIÓN $L_a^k\{\delta\} * L_a^l\{\delta\}$

Sabemos que la siguiente fórmula es válida ([3]):

$$\mathcal{F}\{F^{\pm}_{\beta,n}\} = e^{\frac{\beta\pi i}{2}}(N(s_1,\ldots,s_n) \mp i0)^{-\frac{\alpha}{2}} \tag{45}$$

donde ([3]):

$$N(s_1,\ldots,s_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} s_j^2, \tag{46}$$

y $\mathcal{F}\{f\}$ es la transformada de Fourier definida por

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(y) = \int e^{-i<x,y>} f(x)dx. \tag{47}$$

Haciendo $\beta = -km$ en (45), se obtiene la transformada de Fourier de $F^{\pm}_{-2km}$,

$$\mathcal{F}\{F^{\pm}_{-2km}\} = e^{-km\pi i}(c_1 s_1^2 + \ldots + c_n s_n^2 \mp i0)^{km} \tag{48}$$

donde $c_j = \frac{1}{a_j}$.

De (48) y considerando (42), se tiene,

$$\mathcal{F}.\left\{L_a^{km}\delta\right\} = e^{-km\pi i}(c_1 s_1^2 + ... + c_n s_n^2 \mp i0)^{km} \tag{49}$$

si $a_1,..., a_p > 0$ y $a_{p+1},..., a_{p+q} < 0$.

Por otra parte usando las definiciones (20) y (21) se tiene,

$$(M + i0)^{km} = M_+^{km} + e^{km\pi i} M_-^{km} = M_+^{km} + (-1)^{km} M_-^{km} \tag{50}$$

y

$$(M - i0)^{km} = M_+^{km} + e^{-km\pi i} M_-^{km} = M_+^{km} + (-1)^{km} M_-^{km} \tag{51}$$

donde $k = 0,1,2...$ $\quad m = 1,2,...,$

$$M_+^{\lambda}\begin{cases} M^{\lambda} \text{ if } M > 0 \\ \\ 0 \text{ if } M \leq 0 \end{cases} \tag{52}$$

y

$$M_-^{\lambda}\begin{cases} (-M)^{\lambda} \text{ if } M > 0 \\ \\ 0 \text{ if } M \leq 0. \end{cases} . \tag{53}$$

Ahora escribiendo por definición

$$M^{km} = M_+^{km} + (-1)^{km} M_-^{km}, \tag{54}$$

De (49) y usando (50), (51) y (54) se obtiene la siguiente fórmula

$$\mathcal{F}.\left\{L_a^{km}\{\delta\}\right\} = (-1)^{km} M^{km} = (-1)^{km}(c_1 s_1^2 + ... + c_n s_n^2)^{km} \tag{55}$$

si $a_1,..., a_p > 0$ y $a_p,..., a_{p+q} < 0$; $c_j = \frac{1}{a_j}$, y L_a es definido por (30).

En particular si $m = 1$, $a_1 = a_2 = ... = a_p = 1$ y $a_{p+1} = ... = a_{p+q} = -1$ en (55) se tiene,

$$\mathcal{F}.\left\{L^k\{\delta\}\right\} = (-1)^k (s_1^2 + ... + s_p^2 - s_{p+1}^2 - ... - s_{p+q}^2)^k, \tag{56}$$

donde L está definido por (44).

La fórmula (56) aparece en ([2], página 23)

Ahora tomando en cuenta que $L_a^{km}\{\delta\}$ está en el espacio $\mathcal{O}'^c$ donde $\mathcal{O}'^c$ es el espacio de distribuciones de rápido decrecimiento ([5], p.244) y considerando el clásico teorema de

Laurent Schwartz ([5], página 268, fórmula (IV, 8.5)), se concluye la validez de la siguiente fórmula

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\left\{\{L_a^{km}\delta\} * L_a^{lm}\{\delta\}\right\} = \mathcal{F}\{L_a^k\delta\} \cdot \mathcal{F}L_a^l\{\delta\} = \\ &= (-1)^{km}(-1)^{lm}(c_1s_1^2+\ldots+c_ns_n^2)^{km}(c_1s_1^2+\ldots+c_ns_n^2)^{lm} \\ &= (-1)^{(k+l)m}(c_1s_1^2+\ldots+c_ns_n^2)^{(k+l)m} \\ &= \mathcal{F}\{L_a^{m(k+l)}\{\delta\}\} \ . \end{aligned} \tag{57}$$

De (57), se concluye la siguiente propiedad:

$$L_a^{km}\{\delta\} * L_a^{lm}\{\delta\} = L_a^{m(k+l)}\{\delta\} . \tag{58}$$

En particular si $m=1, a_1,\ldots,a_p=1, a_{p+1}=\ldots=a_{p+q}=-1,$ de (58) se obtiene la fórmula

$$L^k\{\delta\} * L^l\{\delta\} = L^{k+l}\{\delta\} \tag{59}$$

donde L es el operador definido por (44).

La fórmula (59) aparece en ([4]), página 346.

REFERENCIAS

[1] I.M.Gelfand and G.E.Shilov.,Generalized Functions,Vol.I, Academic Press, New York, 1964.

[2] S.E. Trione, Distributional Product, Cursos de Matemática, Nº3, serie II, I.A.M.-CONICET, Argentina 1981.

[3] Manuel A.Aguirre.,The Fourier transform of $((\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^2)^m \pm i0)^\lambda$ International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 64, No. 3, 2010, pp. 389-397.

[4] Manuel A. Aguirre T. , The distribution $\delta^{(k)}(P \pm i0 - m^2),$ Journal of Computational and Applied Mathematics 88 (1977) pp. 339-348.

[5] Laurent Schwartz, Theorie des distributions, Hermann, Paris 1966.

[6] Manuel A. Aguirre T., A convolution product of $(2j)$ th derivative of Dirac´s delta in r and multiplicative r^{-k} and $\nabla(\Delta^j\delta)$, International Journal of Mathematics and Mathematical Science.

Manuel A. Aguirre, Profesor y Decano
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Prov. de Buenos Aires
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar